4^{éme} Sc-Exp

Série N°:7

(Nombres Complexes)

EXERCICE N°1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par (ζ) le cercle de centre O et de rayon 1 et par I et A les points d'affixes respectives 1 et $a=\sqrt{3}+i$

1/ Donner la forme exponentielle de a puis la construire.

2/ Soit B le point d'affixe $b = \dfrac{a-1}{1-\bar{a}}$.

a- Vérifier que $b\bar{b}=1$. En déduire que le point B appartient au cercle (ζ).

b- Montrer que $\dfrac{b-1}{a-1}$ est un réel. En déduire que les points A, B et I sont alignés.

c- Construire le point B dans le repère $(o,\vec{u},\vec{v})$.

3/ Soit θ un argument du nombre complexe b.

Montrer que : $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$

EXERCICE N°2 :

Soit le nombre complexe $z_0 = 1+i\sqrt{3}$.

1/ a- Ecrire z_0 sous forme exponentielle.

b- Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $z_0{}^n + (\bar{z}_0)^n = 2^{n+1}\cos(n\dfrac{\pi}{3})$.

2/ Soit $Z = 1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})$

a- Montrer que $Z = \sqrt{2}\, z_0\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b- Donner la forme trigonométrique de Z.

c- En déduire les valeurs de $\cos(\dfrac{7\pi}{12})$ et $\sin(\dfrac{7\pi}{12})$.

EXERCICE N°3 :

Soit $f(z) = z + j^2\bar{z}$ avec $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1/ Vérifier que : $j^2 = \bar{j}$ et $j^3 = 1$.

2/ Etablir que $|f(z)|^2 - 2|z|^2 = 2Ré(jz^2)$

3/ Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $j^2 f(z)$ est un réel.

4/ Soit $n \in IN^*$, on définit l'application f^n par $\begin{cases} f^1 = f \\ f^n = f \circ f^{n-1} \end{cases}$

a- Calculer $f^2(z)$ puis $f^3(z)$.

b- Montrer que $f^n(z) = 2^{n-1}f(z)$.